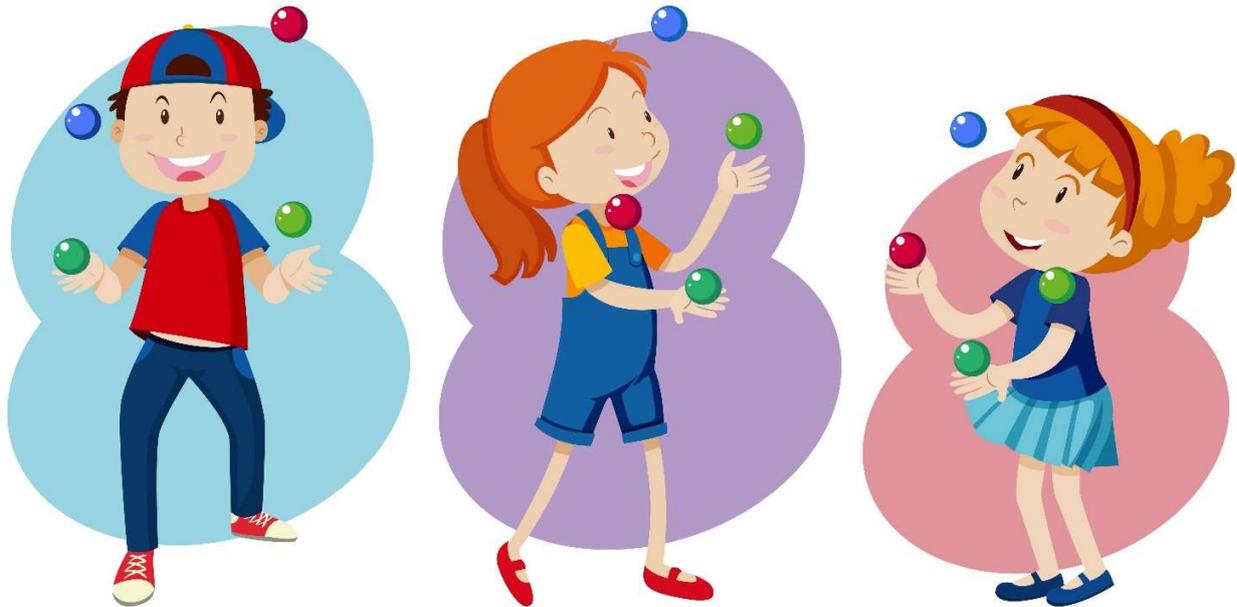


# Raisonnement mathématique et matériel de manipulation

Comprendre et exprimer son raisonnement avec flexibilité et fluidité

3<sup>e</sup> cycle du primaire



Inspiré du *Référentiel d'intervention en mathématique* et éclairé par les données récentes de la recherche, ce document aborde le sujet du matériel de manipulation.

Il pourrait vous permettre de répondre aux questions :

- Quels sont les différents modes de représentation qui supportent le raisonnement de mes élèves?
- Est-ce que le matériel de manipulation produit à lui seul l'apprentissage?
- Quels sont les avantages, pour l'élève et l'enseignant, à utiliser du matériel de manipulation?
- Comment lier intention d'apprentissage et matériel pour assurer la manifestation du raisonnement?

Centre de services  
scolaire de la  
Beauce-Etchemin

Québec 

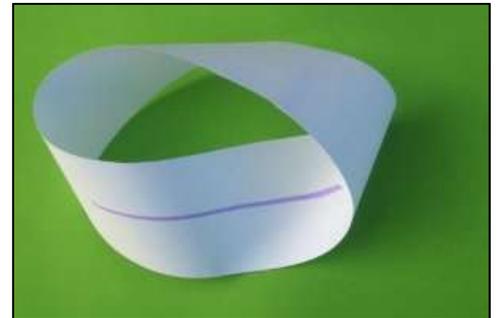
Johanne Morin, conseillère pédagogique  
Centre de services scolaire de la Beauce-Etchemin  
Septembre 2021

## Avant de commencer

Il serait intéressant de proposer à vos élèves du 3<sup>e</sup> cycle les deux activités suivantes pour le permettre de réfléchir à la stratégie : *Utiliser le matériel de manipulation.*

### Le ruban de Möbius

1. Observer la capsule vidéo : <https://youtu.be/SosdtAc-72Q>
2. Remettre une bande de papier à chaque élève dans le but de fabriquer le ruban de Möbius.
3. Recueillir les observations des élèves en leur posant la question suivante :  
-Le ruban de Möbius est un objet à manipuler qui révèle certains concepts mathématiques. *À lui seul, te permet-il de comprendre?*
4. Au besoin, pour des élèves curieux, présenter la formule mathématique complexe associée au ruban. *Est-ce que le ruban a révélé ses secrets mathématiques? Les mathématiciens qui ont révélé les formules savantes, ont-ils eu besoin de manipuler le ruban?*



$$\begin{cases} x = (1 + \frac{t}{2} \cos \frac{v}{2}) \cos v \\ y = (1 + \frac{t}{2} \cos \frac{v}{2}) \sin v \\ z = \frac{t}{2} \sin \frac{v}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} -1 \leq t \leq 1 \\ 0 < v \leq 2\pi \end{matrix}$$

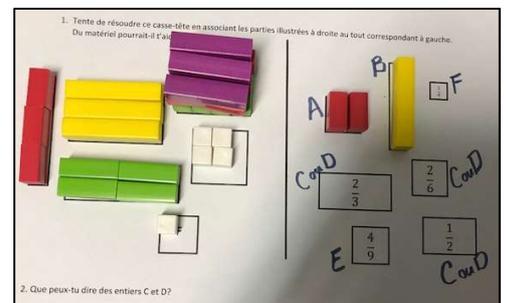
ou l'ensemble des solutions de l'équation suivante:

$$x^2y + yz^2 + y^3 - y - 2xz - 2x^2z - 2y^2z = 0$$

5. Invitez les élèves à préciser leur perception du matériel de manipulation mathématique.

### Le casse-tête de Desjardins et Héту en trois temps

Temps 1 ACTIVER: Remettre l'annexe B aux élèves. Leur demander de décrire ce qui est présenté et de préciser de qui est attendu. *Quelles sont les connaissances nécessaires pour relever le défi? Du matériel de manipulation pourrait-il nous aider (réglettes)?*



Temps 2 EXPLORER: Observer les élèves qui explorent la situation et manifestent leur raisonnement. Au besoin, engager la conversation mathématique en questionnant.

*Que peux-tu dire des entiers C et D? Pourquoi sais-tu que cette réglette représente la moitié?*

Temps 3 EXPRIMER: Animer un temps d'échanges pour que les élèves expriment leur raisonnement en identifiant les obstacles rencontrés ou les certitudes.

Terminer l'activité en invitant les élèves à identifier les avantages à utiliser la stratégie. Ajouter à l'aide-mémoire de classe et personnel les découvertes réalisées.

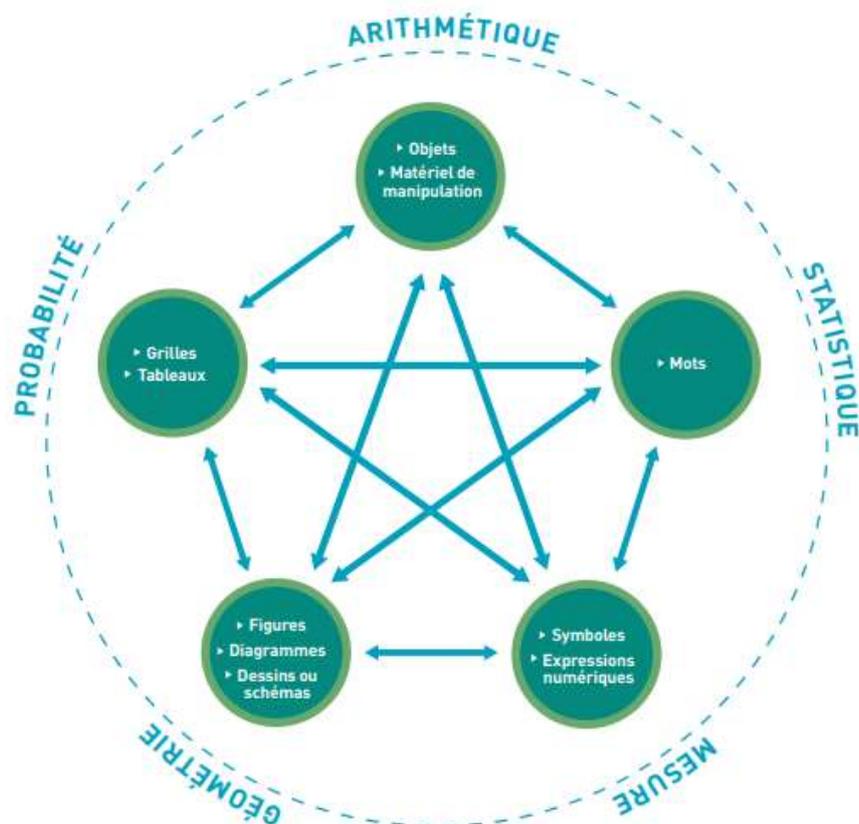
## 1. Quels sont les différents modes de représentation qui supportent le raisonnement mathématique de mes élèves?

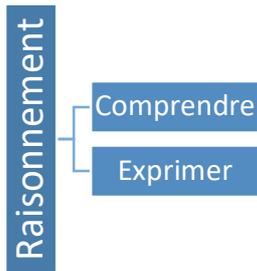
Selon le *Référentiel d'intervention en mathématique*, l'élève s'engage cognitivement dans l'activité mathématique ou y participe activement lorsqu'il communique en appuyant ses propos à l'aide de modes de représentation ou en les combinant pour expliciter sa pensée mathématique. À cet égard, le MEQ (2006) précise que les élèves communiquent en mathématique en utilisant les différents modes de représentation suivants :

- mots;
- symboles et expressions numériques;
- dessins ou schémas, diagrammes et figures;
- grilles et tableaux;
- matériel de manipulation.

« L'exploitation efficace du matériel de manipulation par l'enseignant implique un questionnement qui suscite la réflexion de l'élève. »

*Modes de représentation en mathématique ( PFEQ, enseignement secondaire, p.124)*





Ces différents modes de représentation peuvent être utilisés par l'élève et par l'enseignant, de façon isolée ou combinés entre eux, afin de **donner du sens à un ou à des concepts et processus ou encore de soutenir des propos lors du partage d'un raisonnement à l'oral ou à l'écrit**. Il est important que l'élève se montre flexible dans le passage d'un mode de représentation à un autre (NCTM, 2000; Pape et Tchoshanov, 2001). En effet, comme le

précise Duval (2007), chaque mode de représentation est incomplet en soi pour ce qui est de permettre, de **comprendre et d'exprimer** un raisonnement. En ce sens, une juxtaposition ou une articulation des modes de représentation est souhaitable et permet d'approfondir la compréhension conceptuelle et de soutenir la communication ainsi que le raisonnement.

## 2. Est-ce que le matériel de manipulation produit à lui seul l'apprentissage?

Le matériel de manipulation est un mode de représentation pour lequel certaines précisions doivent être apportées. En effet, l'utilisation du matériel de manipulation pour favoriser l'apprentissage de la mathématique est soutenue par des données probantes provenant de méta-analyses (Carbonneau, Marley et Selig, 2013; Jitendra, Nelson, Pulles, Kiss et Houseworth, 2016). Cependant, le fait que les élèves aient en leur possession du matériel de manipulation ne produira pas à lui seul un apprentissage. Il faut également que l'enseignant ait une **intention d'apprentissage** claire dont la prise en considération sera facilitée par ce matériel.

« L'utilisation du matériel n'est pas magique: parfois il n'y a aucun intérêt à l'utiliser alors que d'autres fois, c'est grâce à la manière de l'utiliser qu'on en tirera parti. »<sup>3</sup>

### Utiliser le matériel de manipulation, une activité mathématique en soi.<sup>2 et 3</sup>

Dans une perspective où les mathématiques se constituent en contexte, peu importe le contexte, faire des mathématiques avec du matériel ne serait pas une version concrète de ce que c'est de faire des mathématiques sans matériel, mais une activité mathématique en soi. Ainsi, il est important de mettre en évidence l'apport du matériel lors de l'analyse a priori d'une tâche mathématique.

### La routine au service du développement de la compréhension du sens du nombre

*Le nombre tout bien réfléchi* est un tableau virtuel (Padlet) permettant aux élèves d'émettre leurs idées mathématiques liées à l'arithmétique. Selon la *Progression des apprentissages, les concepts et les processus à acquérir et à maîtriser dans le champ de l'arithmétique constituent la base en mathématique, puisqu'ils sont réinvestis dans tous les autres champs de la discipline. Dans un contexte de développement de la numératie, il importe de reconnaître les relations qui existent entre ces différents apprentissages essentiels du champ de l'arithmétique qui devraient être durables, préalables et transférables.*

Cette routine du nombre du jour invite donc les élèves à manifester une pensée mathématique flexible pour exprimer, si besoin, avec du matériel, leurs idées. Par exemple, avec le nombre 23,03, les élèves

pourraient utiliser la corde à linge ou une droite numérique pour affirmer que 23,3 est plus grand que 23,03 ou que  $23,03 = 23 \frac{3}{100}$

### **3. Quels sont les avantages, pour les élèves et l'enseignant, à utiliser du matériel de manipulation?<sup>5</sup>**

Lorsque les élèves utilisent du matériel de manipulation, on les encourage à essayer différentes approches et à prendre des risques leur permettant de trouver eux-mêmes les réponses. On les invite à explorer et à représenter des concepts mathématiques de diverses façons à l'aide d'outils d'apprentissage concrets. Cela augmente la quantité d'information sensorielle qu'ils acquièrent et les aide à se rappeler les procédés mathématiques à utiliser pour résoudre de futurs problèmes (Garforth et Siegel, 2014).<sup>4</sup>

#### Avantages pour les élèves

- Approfondir leur compréhension des concepts mathématiques abstraits.
- Créer un répertoire d'images auquel se référer lorsque les symboles abstraits deviennent trop complexes.
- Résoudre des problèmes.
- Représenter la pensée mathématique.
- Développer des stratégies cognitives et métacognitives.

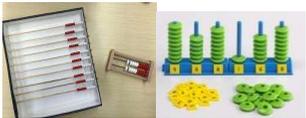
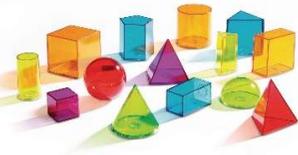
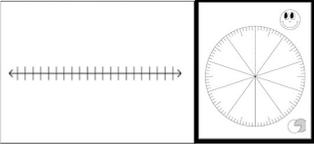
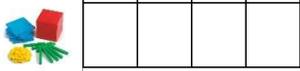
#### Avantages pour l'enseignant

- Multiplier les occasions d'observer les élèves en action.
- Offrir de la rétroaction immédiate.
- Réguler son enseignement.
- Permettre de donner du « sens » aux différents objets à manipuler.

1. Ministère de l'éducation (2019). Référentiel d'intervention en mathématique.
2. Corriveau et Jeannotte (2015). [L'utilisation de matériel en classe de mathématique au primaire : quelques réflexions sur les apports possibles](#)
3. Corriveau et Jeannotte (2019). [Le matériel de manipulation : ça va de soi que ça ne va pas de soi](#)
4. TA à l'école (2020). [Utilisation de matériel de manipulation pour appuyer l'apprentissage des mathématiques à la maison](#)
5. Alberta. Les maths : quoi de 9? [Qu'entend-on par « matériel de manipulation » ?](#)

# Matériel de manipulation pour raisonner (comprendre ou exprimer) au 3<sup>e</sup> cycle

L'armoire math interactive Web donne accès à une version numérique du matériel [ICI](#).

Jetons ( bicolores)	Bouliers et abaques	Blocs mosaïques	Réglettes	Cubes emboîtables
 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Grouper et dégrouper</li> <li>-Travailler la fraction (collection)</li> <li>-Construire des fractions équivalentes</li> <li>-Réaliser des expériences liées à la probabilité</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Représenter des nombres</li> <li>-Travailler la valeur de position</li> <li>-Travailler le vocabulaire lié aux nombres</li> <li>-Effectuer des opérations</li> <li>-Développer des stratégies de calcul mental</li> <li>-Boulier Rekenrek <a href="#">ICI</a></li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Représenter des fractions (surface)</li> <li>-Opérer sur les fractions</li> <li>-Créer des frises et des dallages (réflexion, translation)</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Travailler le sens de la fraction (longueur)</li> <li>-Opérer sur les fractions</li> <li>-Représenter et ordonner des fractions</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Grouper et dégrouper</li> <li>-Faire des approximations</li> <li>-Travailler la fraction (collection)</li> <li>-Construire des fractions équivalentes</li> <li>-Mesurer (unités conventionnelles)</li> <li>-Représenter des diagrammes à bandes</li> <li>-Construire des polyèdres</li> </ul>
<p align="center"><b>Solides</b></p>	<p align="center"><b>Géoplan</b></p>	<p align="center"><b>Droites numériques non graduées ou du temps, disque des centièmes et bandes de carton</b></p>	<p align="center"><b>Grilles de nombres, grilles vierges, table de Pythagore</b></p>	<p align="center"><b>Blocs base 10 et tableaux et papier à plier</b></p>
 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Classifier des solides</li> <li>-Décrire des solides</li> <li>-Comparer des solides</li> <li>-Aborder la relation d'Euler</li> <li>-Développer des polyèdres <a href="#">ICI</a> et <a href="#">ICI</a></li> <li>-Estimer et mesure des volumes</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Tracer et observer des figures planes</li> <li>-Travailler l'aire et le périmètre</li> <li>-Représenter des fractions</li> <li>-Opérer sur des fractions</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Représenter, associer et comparer des nombres décimaux, des fractions (longueur et surface), des pourcentages</li> <li>-Corde à linges pour la droite</li> <li>-Structures additives</li> </ul> <p align="center"><b>Disque des centièmes</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Représenter, associer et comparer des nombres décimaux, des fractions, des pourcentages</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>-Calcul mental <a href="#">ICI</a></li> <li>-Grilles des 1000 premiers nombres <a href="#">ICI</a></li> <li>-Table de Pythagore (10 x 0) <a href="#">ICI</a></li> </ul>	 <p align="center"><b>Blocs base 10 et tableau</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Faire des échanges</li> <li>-Effectuer des opérations Représenter des nombres naturels et décimaux</li> <li>-Représenter des fractions</li> <li>-Construire des fractions équivalentes</li> <li>-Matériel virtuel <a href="#">ICI</a></li> </ul> <p align="center"><b>Papier à plier pour les fractions</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-Papier ciré pour l'ouverture d'un angle</li> <li>-Tableau relations unités de mesure</li> </ul>

### Ressources pour l'inspiration de contextes signifiants

1. Atelier.on.ca : <http://www.atelier.on.ca/edu/core.cfm?p=documentView&navID=documentView&c=0&type=2&L=2>
2. Charbonneau, Caroline. (2019) *La manipulation en mathématique au cœur des apprentissages*. Chenelière Éducation.
3. Prest, Séance collective. <https://prest-math.org/prest-math/inscription-connexion/> , accès gratuit pour les enseignants du CSSBE.
4. Site des services éducatifs du CSSBE : L'armoire math interactive (web), Le matériel de manipulation, Subitisation et boulier rekenrek, Un problème de bonne journée, Fluidité, flexibilité et calcul mental, etc.

### Un mot à propos des épreuves du ministère 2022

Lors des examens du ministère, les élèves de 6<sup>e</sup> peuvent utiliser du matériel de manipulation pour réaliser les tâches de compétences *Résoudre* (C1) et *Raisonner* (C2). C'est dans le guide d'administration que l'on retrouve la liste du matériel autorisé ([édition 2019](#)).

Il est à noter que pour l'évaluation de la compétence *Résoudre* (C1), le lexique est interdit en 2022. Ainsi, il devient important de planifier aux séquences d'apprentissage du temps pour consigner les observations à propos des concepts et processus. Cette consignation devra se faire sur un document recto-verso de dimension lettre. Vous pouvez visiter [le site des services éducatifs](#) à ce sujet.

#### 4. Comment lier intention d'apprentissage et matériel pour assurer la manifestation du raisonnement?

INTENTION D'APPRENTISSAGE	RAISONNER Comprendre / Exprimer	OBJETS					CONTEXTE
Fractions équivalentes	Comprendre	Jetons	Bouliers/Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	Surface <sup>1</sup> : <a href="http://www.atelier.on.ca/edu/pdf/Mod50_10_act_decou_fract_surface_456.pdf">http://www.atelier.on.ca/edu/pdf/Mod50_10_act_decou_fract_surface_456.pdf</a> Collection <sup>1</sup> : <a href="http://www.atelier.on.ca/edu/pdf/Mod50_11_act_decou_frac_ensem_456.pdf">http://www.atelier.on.ca/edu/pdf/Mod50_11_act_decou_frac_ensem_456.pdf</a>
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	
Stratégies de calcul mental	Comprendre	Jetons	Bouliers/Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	Subitisation et calcul mental <sup>4</sup> <a href="#">ICI</a> .
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	
Fractions Trouver le tout à partir d'une partie	Exprimer	Jetons	Bouliers/Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	Mathis a préparé des sacs de bonbons à donner à l'Halloween. 6 sacs ont déjà été donnés aux enfants. Cela représente $\frac{3}{10}$ du nombre total de sacs. Combien de sacs Mathis avait-il préparés au total? <sup>2</sup>
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	
Fractions	Exprimer	Jetons	Bouliers/Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	Émilio fait du jogging tous les soirs après le souper. Il fait le même parcours plusieurs fois selon la durée de son entraînement. Ce soir, il a couru $\frac{3}{2}$ fois son parcours. S'il fait la même distance pendant 3 jours, combien de fois aura-t-il couru son parcours? Utilise la réglette rouge comme entier. <sup>2</sup>
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	
Pourcentage Notation fractionnaire et décimale Fraction irréductible	Comprendre Exprimer	Jetons	Bouliers/Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Utilise du matériel pour représenter 75%. (surface, jetons, etc.)</li> <li>2. Représente 75% de 20 jetons.</li> <li>3. Exprime en notation fractionnaire et décimale : 65%, 43%, 30%</li> <li>4. 60% de 40 jetons?</li> </ol> <i>Prest, Affronte tes peurs, Collection 6, Parcours 5 centre 1, séance collective</i> <sup>3</sup>
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	
Estimer et mesurer le temps	Exprimer	Jetons	Bouliers/Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	Pour la première journée de ton camp de soccer, tu dois être sur le terrain à 8h15. Tu dois marcher $\frac{1}{4}$ heure pour te rendre à l'arrêt d'autobus, prévoir 20 minutes pour le trajet en autobus, marcher 5 minutes pour te rendre au stade et prévoir 10 minutes pour revêtir l'équipement et l'uniforme de l'équipe. À quelle heure dois-tu partir? <i>Prest, Affronte tes peurs, Collection 6, Parcours 1, centre 1, séance collective</i> <sup>3</sup>
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	
Structures additives	Comprendre Exprimer	Jetons	Bouliers/Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	Instaurer la routine <i>Un problème de bonne journée</i> et suivre les notes didactiques permettant aux élèves de se représenter le sens des opérations. Site des SÉ du CSSBE. <i>Un problème de bonne journée</i> , <a href="#">ICI</a> <sup>4</sup>
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	

Planification de contextes pour raisonner à l'aide d'objets

Annexe A

INTENTION D'APPRENTISSAGE	RAISONNER Comprendre / Exprimer	OBJETS					CONTEXTE
		Jetons	Boul./Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	
		Jetons	Boul./Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	
		Jetons	Boul./Ab.	Mosaïque	Réglettes	Cubes	
		Solides	Base 10	Droites	Grilles	Tableaux Papier	

1. Tente de résoudre ce casse-tête en associant les parties illustrées à droite au tout correspondant à gauche.  
Du matériel pourrait-il t'aider? Lequel?

The puzzle consists of six pieces on the left and six fractions on the right, separated by a vertical line.

Left pieces:

- A: A tall, narrow vertical rectangle.
- B: A horizontal rectangle.
- C: A square.
- D: A wide horizontal rectangle.
- E: A square.
- F: A small square.

Right fractions:

- $\frac{2}{3}$  (top left)
- $\frac{1}{3}$  (top middle, tall vertical rectangle)
- $\frac{1}{4}$  (top right, small square)
- $\frac{2}{3}$  (middle left, wide horizontal rectangle)
- $\frac{2}{6}$  (middle right)
- $\frac{4}{9}$  (bottom left, small square)
- $\frac{1}{2}$  (bottom right, wide horizontal rectangle)

2. Que peux-tu dire des entiers C et D?